Systemtheoretischer Ansatz für ein Rekonstruktionsverfahren zur Ermittlung von Luftwechselraten aus Radonmessdaten

Gliederung

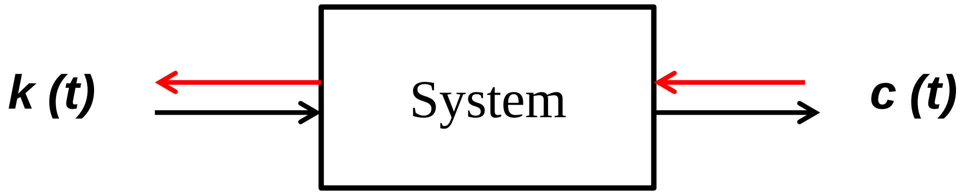
1. Ziel und Idee
2. Modellbildung und Algorithmus
3. Messaufbau und Ergebnisse
4. Analyse der Messunsicherheiten
5. Zusammenfassung und Diskussion

Ziel und Idee

- **Ziel**: Berechnung der Luftwechselrate aus der Radonkonzentration zur Beurteilung der Raumluftqualität

- **Idee**: Ermittlung eines Zusammenhangs zwischen Luftwechselrate und Radonkonzentration

  - Eingangssignal: Luftwechselrate *k (t)*
  - Ausgangssignal: Radonkonzentration *c (t)*

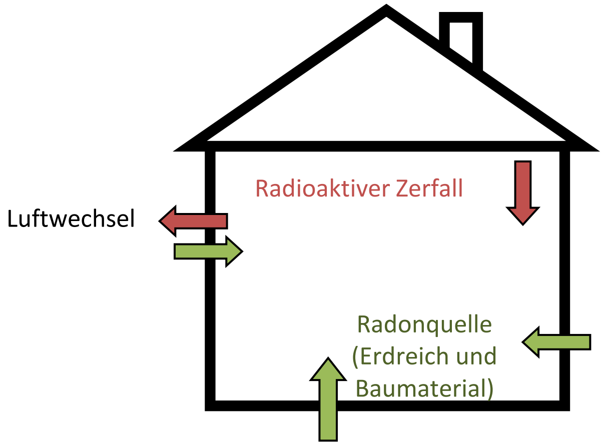


Modellbildung

1. Ermittlung einer Differentialgleichung:

$$\boxed{\frac{dc(t)}{dt} = -\lambda \cdot c(t) + Q_v + k(t) \cdot c_a - k(t) \cdot c(t)}$$

- Radioaktiver Zerfall $\longrightarrow$ $-\lambda \cdot c(t)$
- Radonquellstärke $\longrightarrow$ $\frac{Q}{V} = Q_v$
- Luftwechsel $\longrightarrow$ $k(t) \cdot c_a - k(t) \cdot c(t)$



Modellbildung

2. Ermittlung von *c (t)* aus *k(t)*:

- Lösung der Differentialgleichung mit konstanter Luftwechselrate:

$$\boxed{c(t) = e^{-(\lambda+k)\cdot t} \cdot \left(c_0 - \frac{Q_V + c_a \cdot k}{\lambda + k} \right) + \frac{Q_V + c_a \cdot k}{\lambda + k}}$$

- Mit zeitabhängiger Luftwechselrate:

➢ Betrachtungszeitraum t auf ein kleines Intervall Δt reduzieren

➢ Luftwechselrate *k(n)* bleibt bei jedem Zeitintervall konstant

➢ Iterative Berechnung der Radonkonzentration aus einem beliebigen Verlauf der Luftwechselrate

$$\boxed{c(n) = e^{-(\lambda+k(n))\cdot \Delta t} \cdot \left(c(n-1) - \frac{Q_V + c_a \cdot k(n)}{\lambda + k(n)} \right) + \frac{Q_V + c_a \cdot k(n)}{\lambda + k(n)}}$$

3. Ermittlung von *k (t)* aus *c (t)*:

- Umformen der DGL in eine Differenzengleichung

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}=Q_V-\lambda\cdot c(t)+k(t)\cdot c_a-k(t)\cdot c(t)$$

- Mit diskreter Schreibweise

$$\frac{c(n+1)-c(n)}{\Delta t}=Q_V-\lambda\cdot c(n)+k(n)\cdot c_a-k(n)\cdot c(n)$$

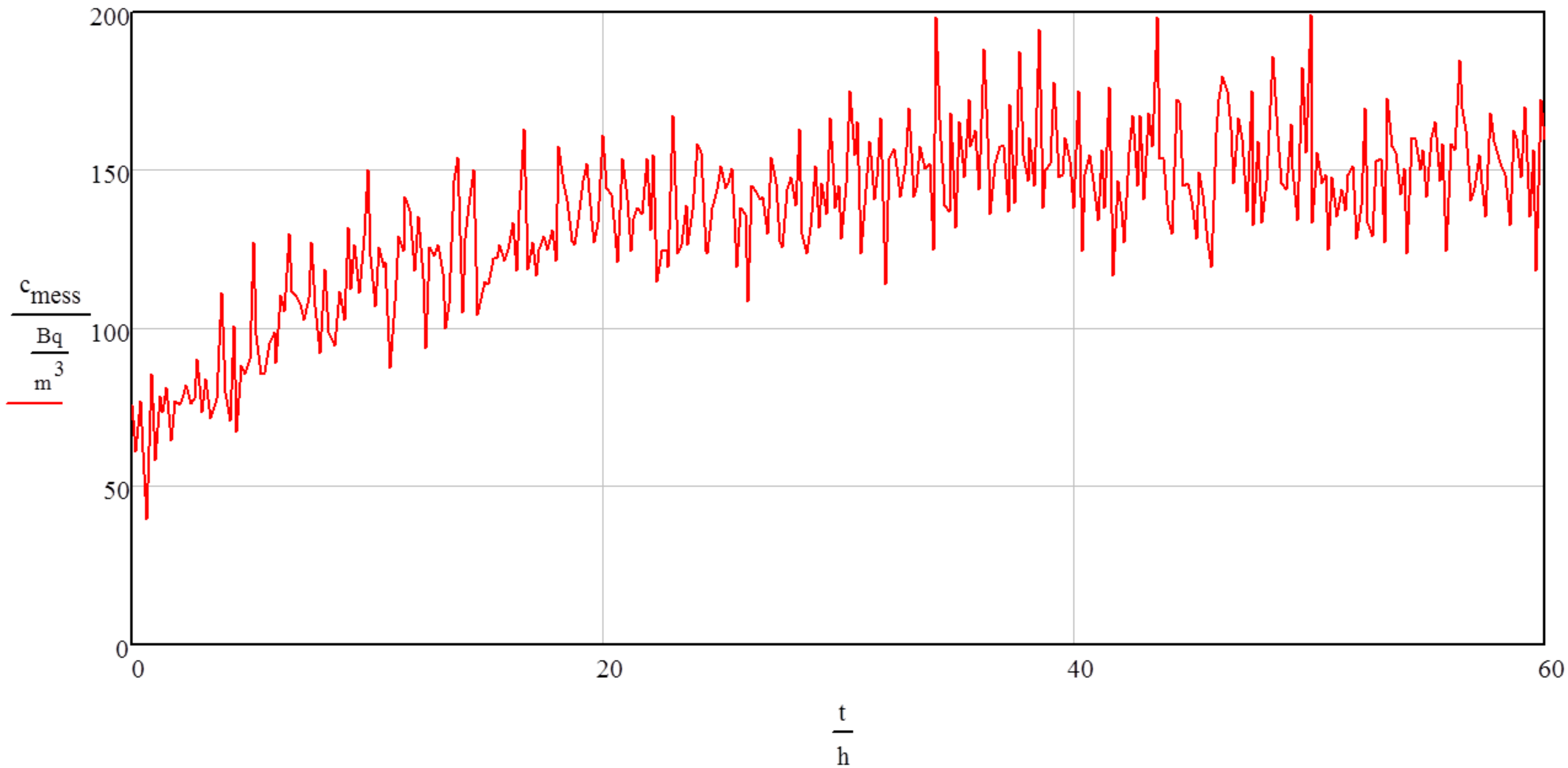
- Umstellung nach der Luftwechselrate

$$\boxed{k(n)=\frac{\frac{c(n+1)-c(n)}{\Delta t}-\boxed{Q_V}+\lambda\cdot c(n)}{c_a-c(n)}}$$

!!!

Radonquellstärke

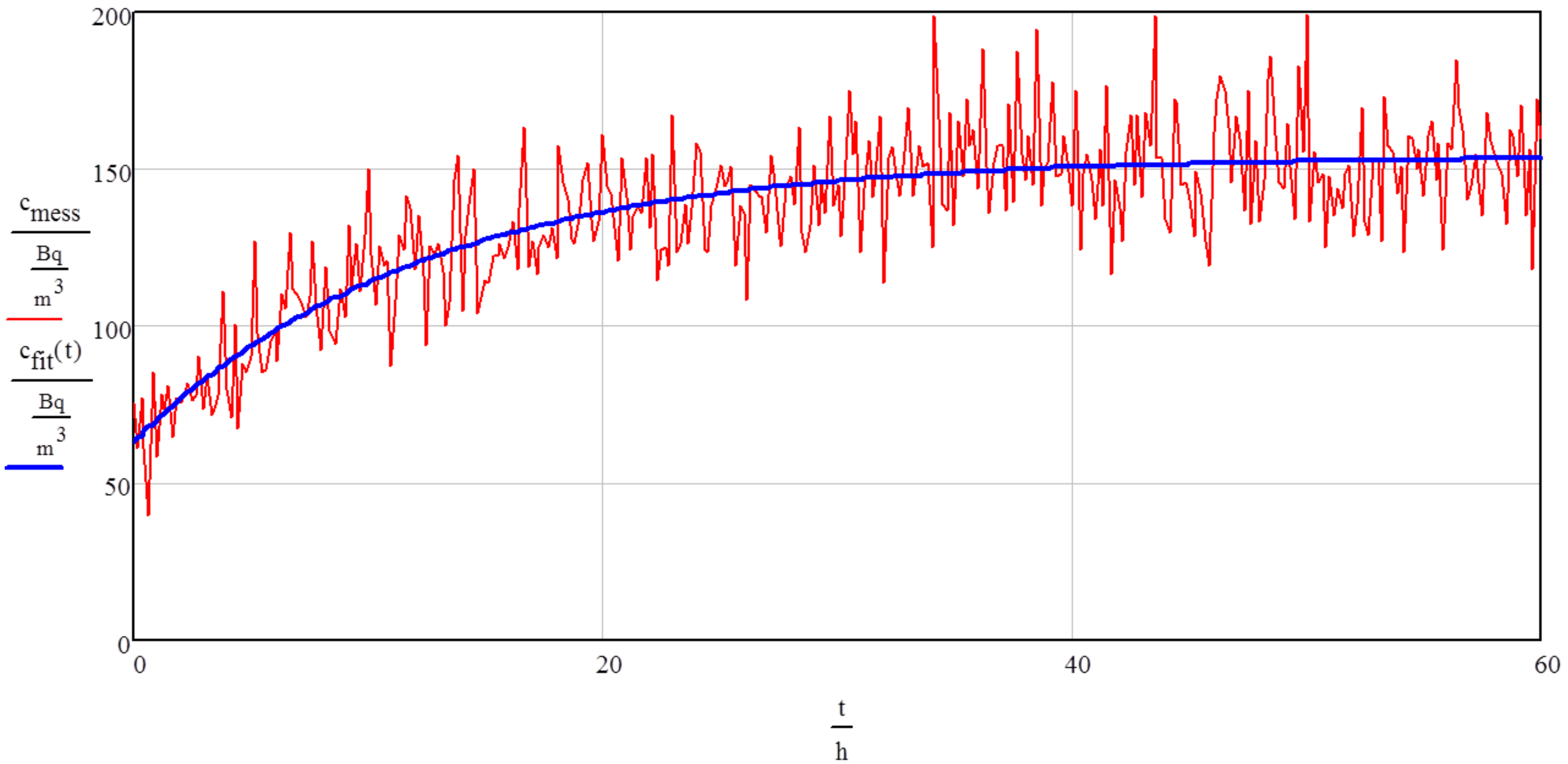
- Charakterisiert den zu untersuchenden Raum vollständig
- Sagt aus, wie viel Aktivität pro Zeiteinheit von einer Quelle emittiert wird
- Ermittlung durch Aufnahme einer Sättigungskurve der Radonkonzentration



Radonquellstärke

- Anpassung der Fitparametern τ , c_0 und $c(\infty)$ an die Fit-Funktion:

$$\boxed{c(t) = e^{\frac{-t}{\tau}} \cdot (c_0 - c(\infty)) + c(\infty)}$$



Radonquellstärke

- Berechnung der Radonquellstärke mit den Fit-Parametern:

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \underbrace{e^{-(\lambda+k)\cdot\infty}\cdot\left(c_0 - \frac{Q_V + c_a\cdot k}{\lambda+k}\right)}_{=0} + \frac{Q_V + c_a\cdot k}{\lambda+k}$$

$$c(\infty) = \frac{Q_V + c_a\cdot k}{\lambda+k}$$

➢ Nach Q_V auflösen!

$$Q_V = c(\infty)\cdot(\lambda+k) - c_a\cdot k$$

Mit $\tau = \dfrac{c(\infty)-c_0}{c'(0)} = \dfrac{1}{\lambda+k}$ bzw. $k = \dfrac{1}{\tau} - \lambda$

$$\boxed{Q_V = \frac{c(\infty)}{\tau} - c_a\cdot\left(\frac{1}{\tau} - \lambda\right)}$$

Modellbildung

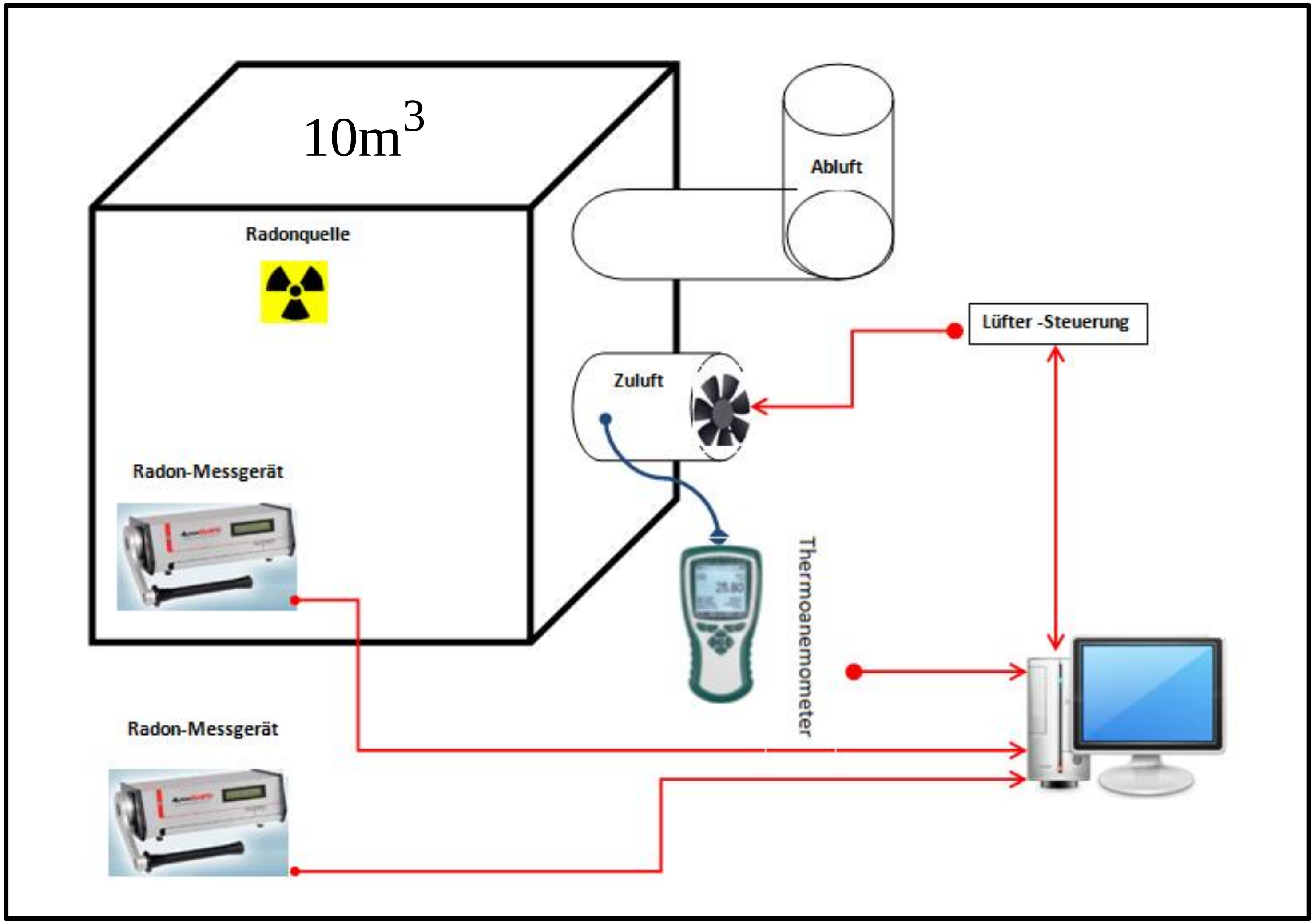
- Ermittlung von *c (t)* aus *k (t)*:

$$\boxed{c(n) = e^{-(\lambda + k(n))\cdot \Delta t} \cdot \left(c(n-1) - \frac{Q_V + c_a \cdot k(n)}{\lambda + k(n)} \right) + \frac{Q_V + c_a \cdot k(n)}{\lambda + k(n)}}$$

- Rekonstruktion von *k (t)* aus *c (t)*:

$$\boxed{k(n) = \frac{\dfrac{c(n+1) - c(n)}{\Delta t} - Q_V + \lambda \cdot c(n)}{c_a - c(n)}}$$

Messaufbau



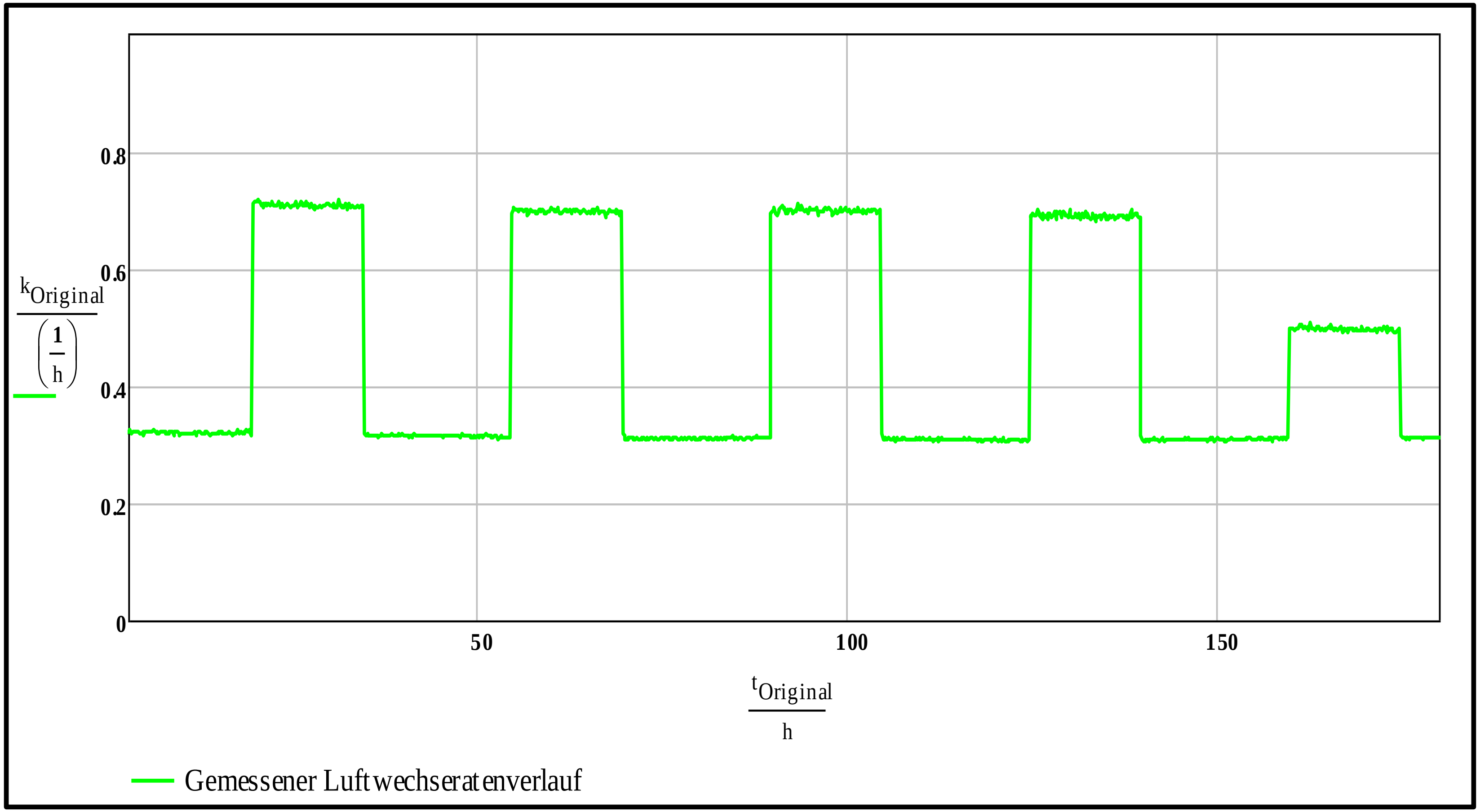
10m³
Abluft
Radonquelle
Lüfter -Steuerung
Zuluft
Radon-Messgerät
Thermoanemometer
Radon-Messgerät

Messaufbau

Messaufbau

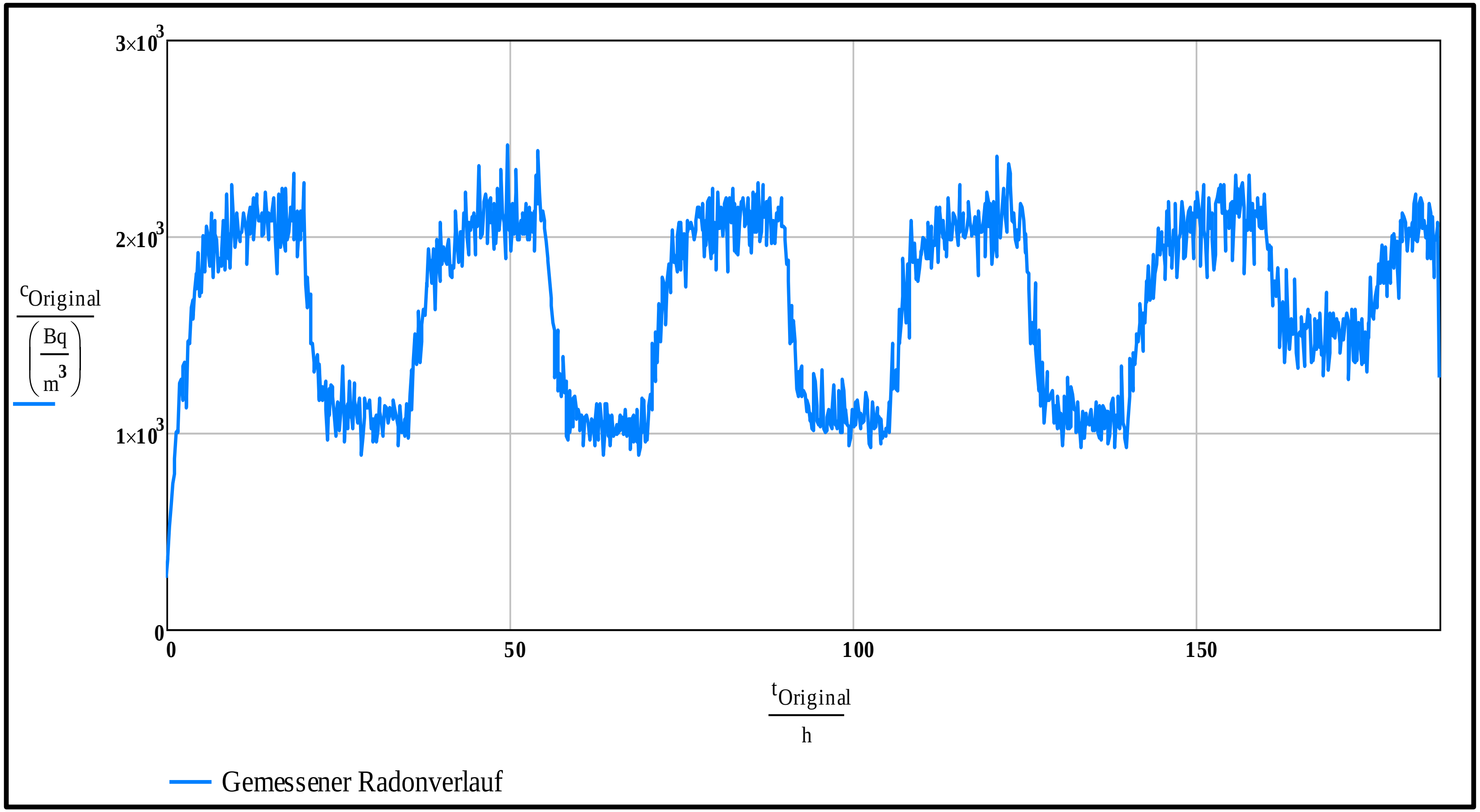
Ergebnisse aus der Praxis

- Testsignal der Luftwechselrate :



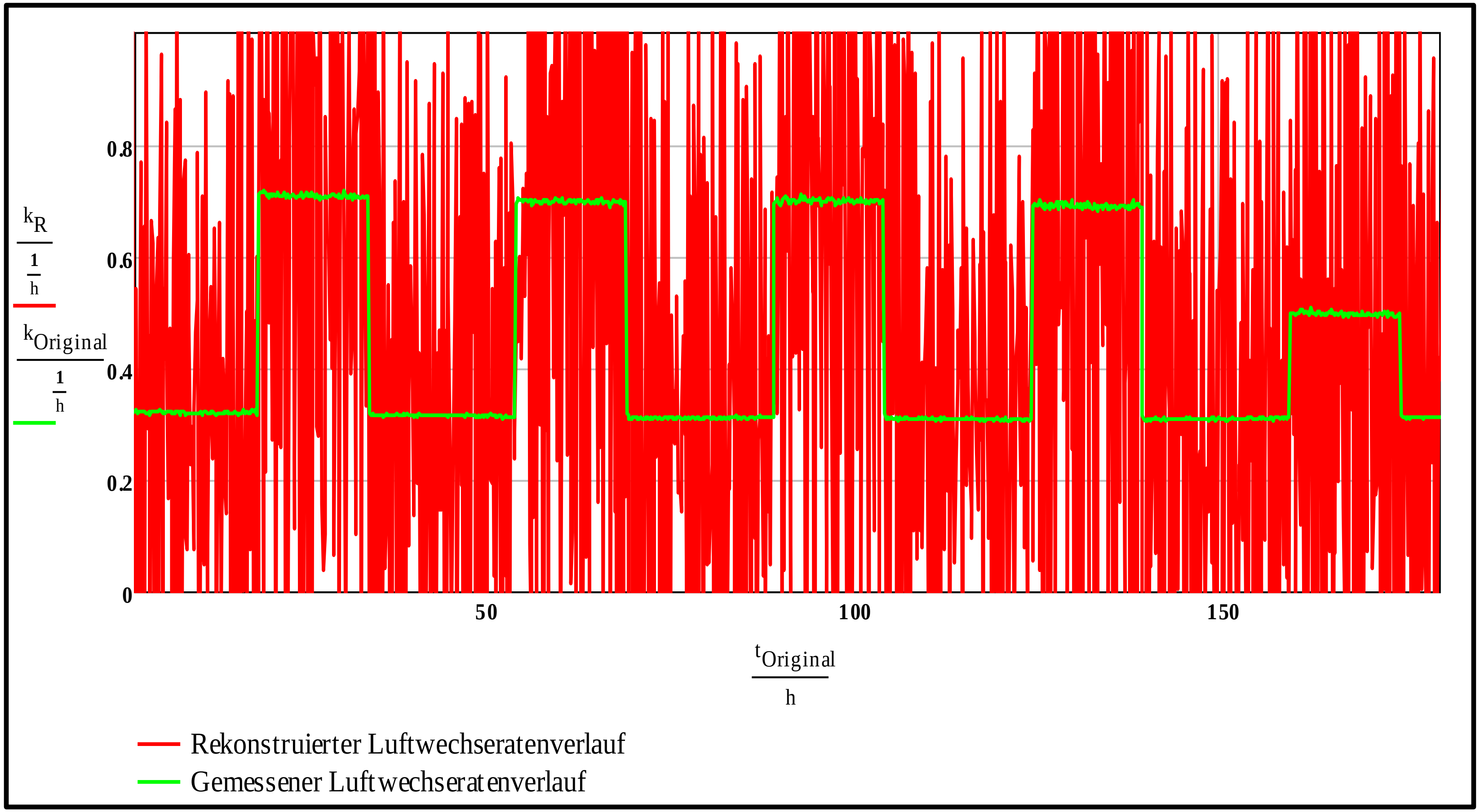
Ergebnisse aus der Praxis

- Messsignal der Radonkonzentration:



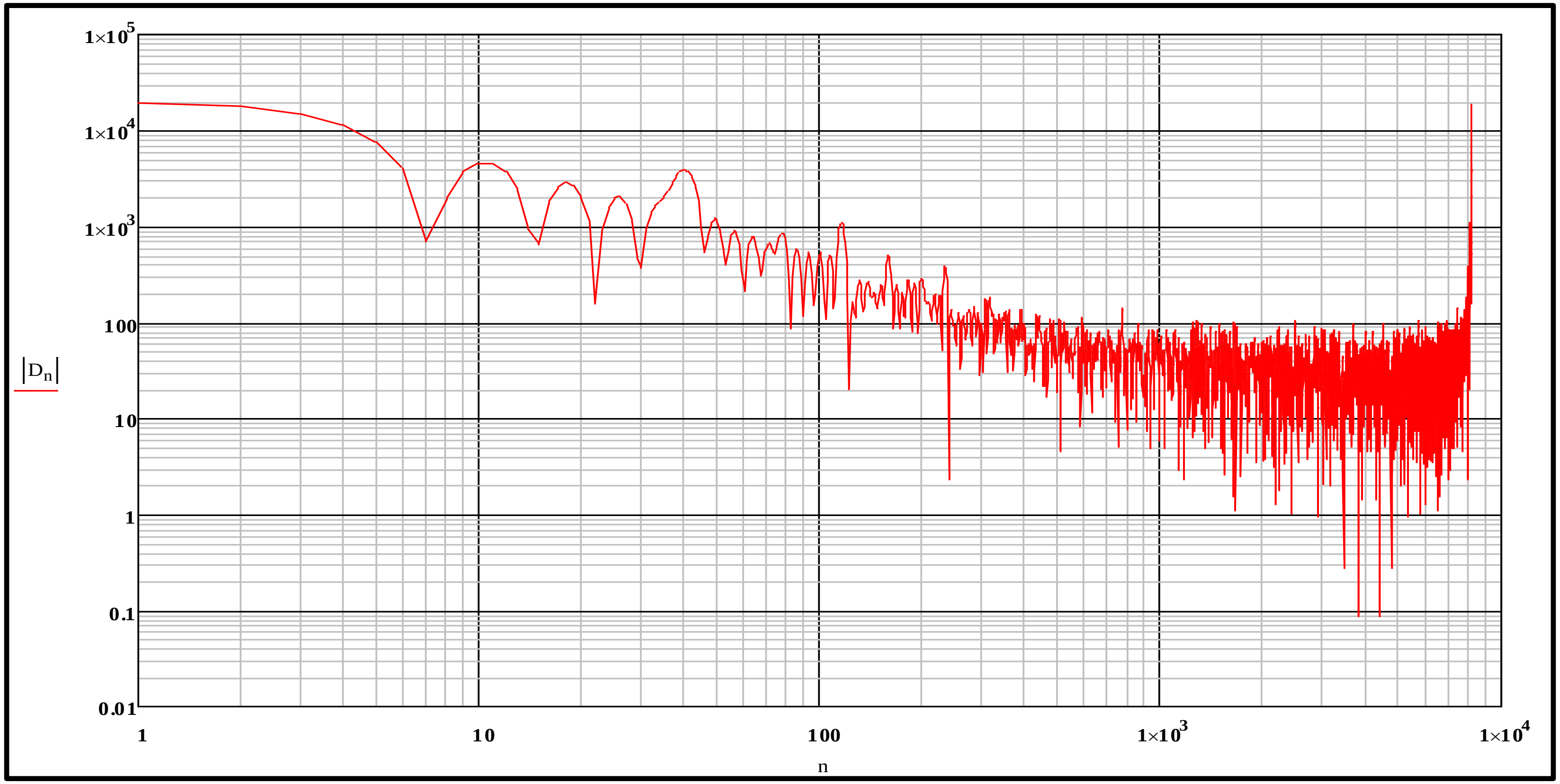
Ergebnisse aus der Praxis

- Rekonstruktion von *k (t)* aus *c (t)* durch Differenzengleichung:



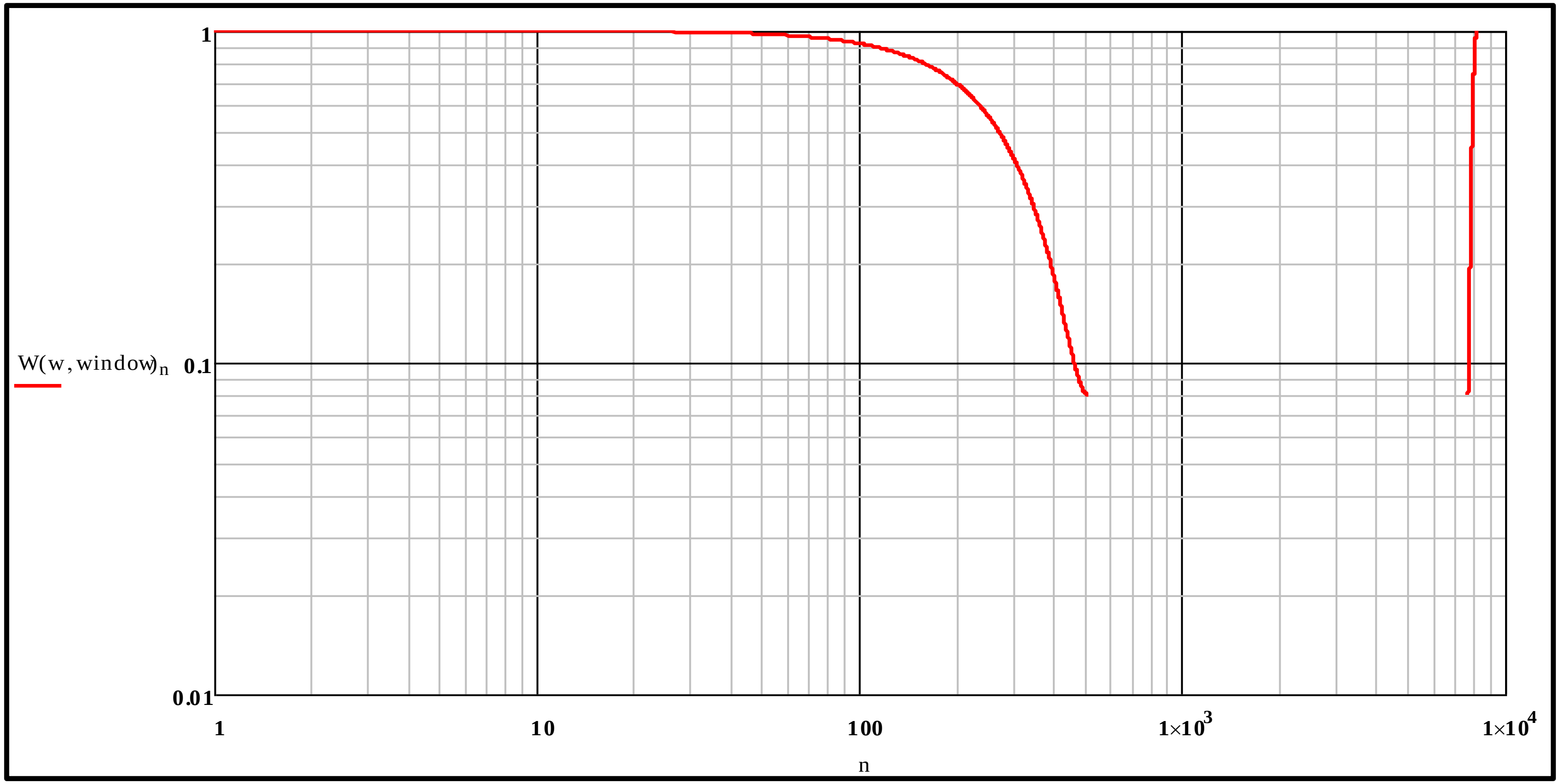
Filterung durch Fensterfunktionen:

1) Diskrete-FFT der Radonmesssignales mit 8192 Abtastwerte



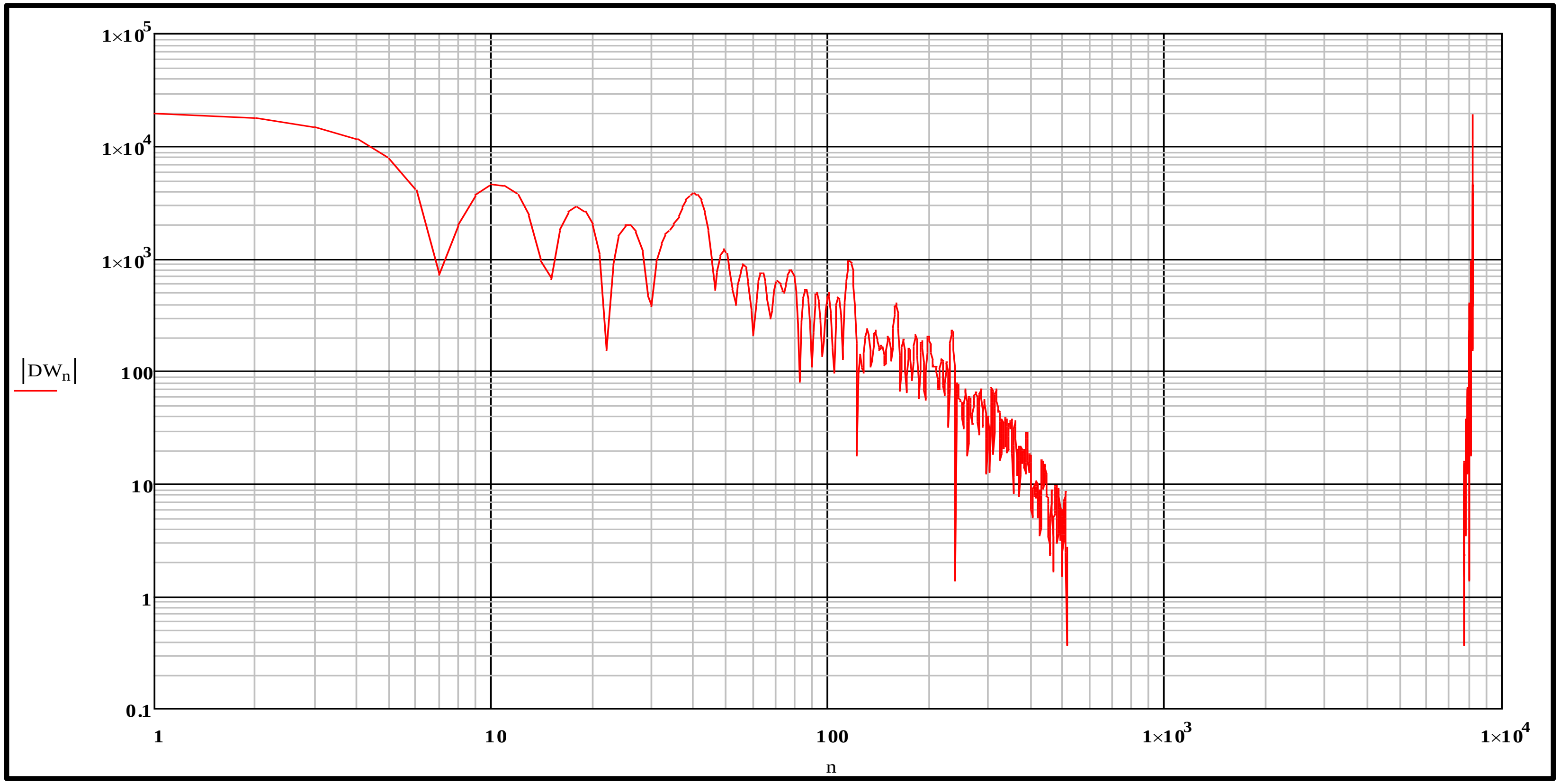
Filterung durch Fensterfunktionen:

2) Multiplikation des Spektrums mit einer Fensterfunktion (Hammingfenster der Breite 512 Samples)



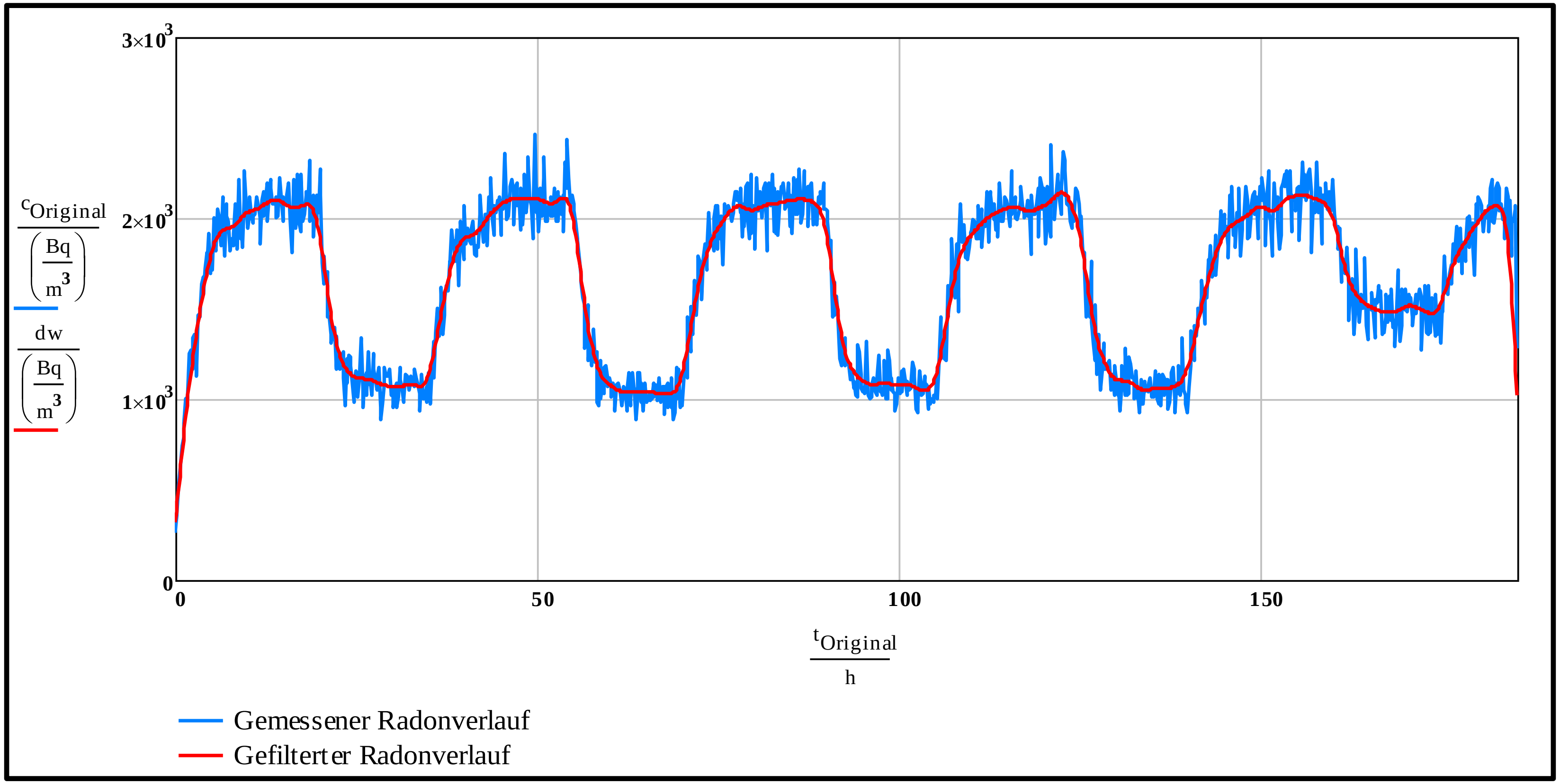
Filterung durch Fensterfunktionen:

2) Multiplikation des Spektrums mit einer Fensterfunktion (Hammingfenster der Breite 512 Samples)



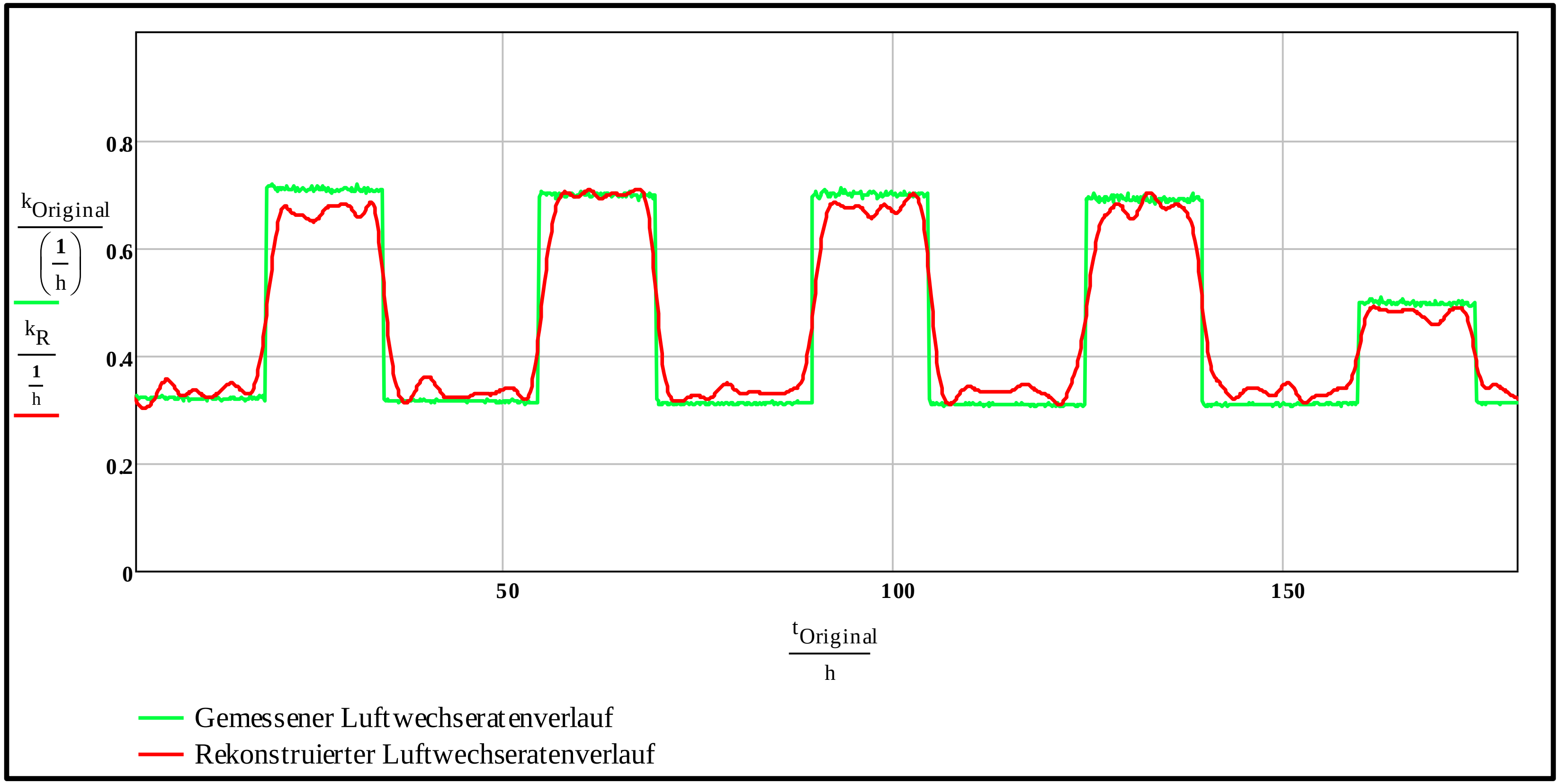
Filterung durch Fensterfunktionen:

3) IFFT des Multiplikationsergebnisses



Filterung durch Fensterfunktionen:

4) Rekonstruktion von k(n) aus gefilterten c(n)



Filterung durch Fensterfunktionen:

- **Frage**: Mit welcher Fensterfunktion soll ich am besten filtern?

- **Antwort**: Vergleich der Signal-Rausch-Verhältnissen (SNR) der Signale nach der Filterung mit den unterschiedlichen Fensterfunktionen

- **Beispiel**: Für unser Beispiel liefert die Filterung durch ein Hamming-Fenster das höchste SNR

Unsicherheitsanalyse:

- Die zu bestimmende Größe ist k(n):

$$k(n) = \frac{\dfrac{c_{filter}(n+1) - c_{filter}(n)}{\Delta t} - Q_V + \lambda \cdot c_{filter}(n)}{c_a - c_{filter}(n)}$$

- Abweichung der einzelnen Messwerte führen zu einer Abweichung von k(n)
- Bestimmung der Messabweichungen der Messgrößen c_{filter} , c_a
- Bestimmung der Messabweichung der Quellstärke
- Gauß ´ sche Fehlerfortpflanzung

Unsicherheitsanalyse:

- Gauß´ sche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta k(n) = \sqrt{\left(\left|\frac{d}{dc(n)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc(n+1)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n+1)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dQ_V} \cdot k(n) \cdot \Delta Q_V\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc_a} \cdot k(n) \cdot \Delta c_a\right|\right)^2}$$

$$\boxed{\Delta c(n) = \Delta c(n+1) = stdev(c(n), c(n+1)) = \frac{|c(n) - c(n+1)|}{2}}$$

Ergebnisse aus der Praxis

Unsicherheitsanalyse:

- Gauß´ sche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta k(n) = \sqrt{\left(\left|\frac{d}{dc(n)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc(n+1)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n+1)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dQ_V} \cdot k(n) \cdot \Delta Q_V\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc_a} \cdot k(n) \cdot \Delta c_a\right|\right)^2}$$

$$\boxed{\Delta c_a = \frac{stdev(c_a)}{\sqrt{n}}}$$

Unsicherheitsanalyse:

- Gauß´ sche Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta k(n) = \sqrt{\left(\left|\frac{d}{dc(n)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc(n+1)} \cdot k(n) \cdot \Delta c(n+1)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dQ_V} \cdot k(n) \cdot \Delta Q_V\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc_a} \cdot k(n) \cdot \Delta c_a\right|\right)^2}$$

$$\boxed{Q_V = \frac{c(\infty)}{\tau} - c_a \cdot \left(\frac{1}{\tau} - \lambda\right)} \longrightarrow \boxed{\Delta Q_V = \sqrt{\left(\left|\frac{d}{dc(\infty)} \cdot Q_V \cdot \Delta c(\infty)\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{d\tau} \cdot Q_V \cdot \Delta \tau\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{d}{dc_a} \cdot Q_V \cdot \Delta c_a\right|\right)^2}}$$

Unsicherheitsanalyse:

- Für unser Beispiel:

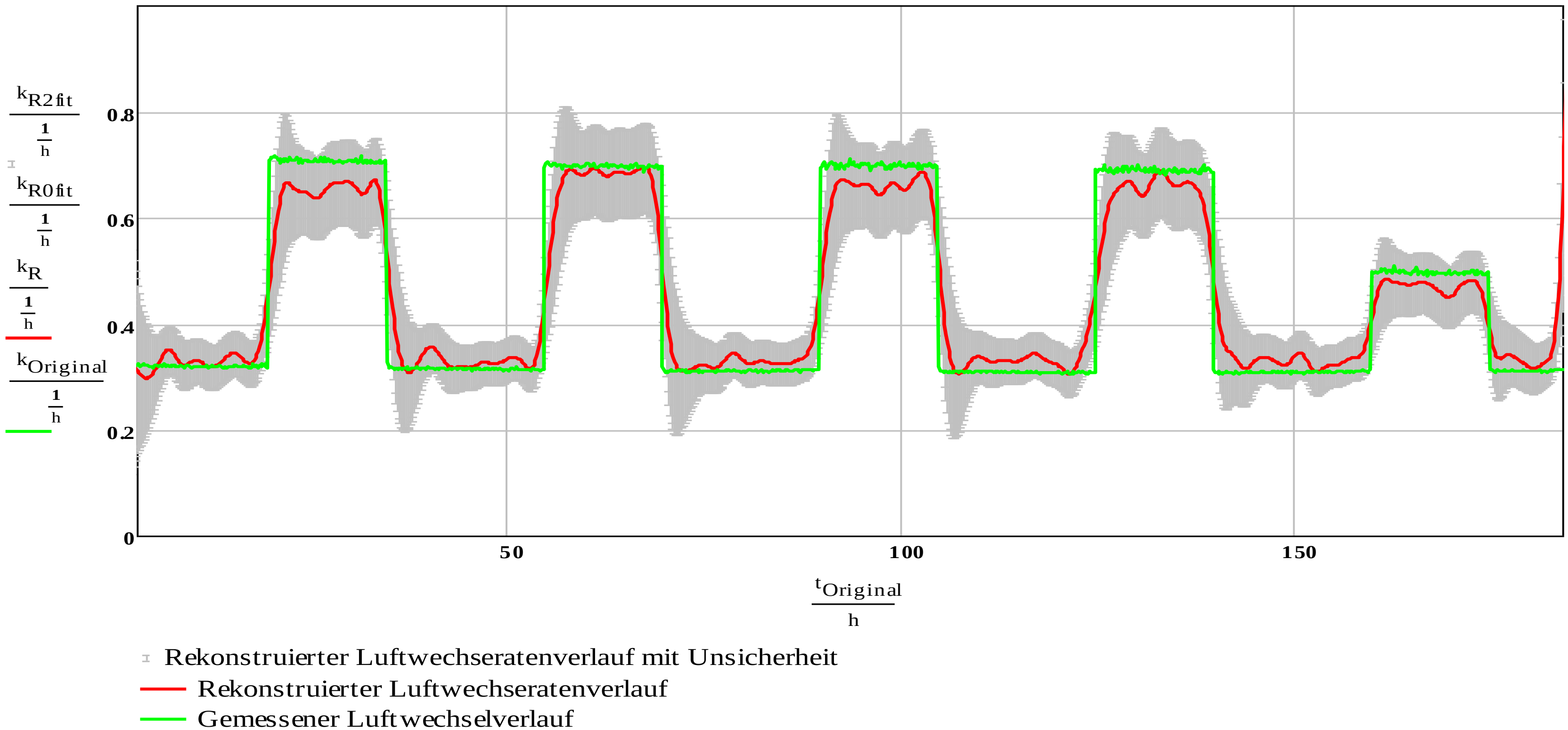
- Unsicherheit der Quellstärke von ±12,1 %
- Unsicherheit der Außenkonzentration von ±1,5 %
- Unsicherheit der Konzentrationen c(n) und c(n+1) von ±0,4 %

- führt zu einer mittleren Unsicherheit der Luftwechselrate von ±15,3 %

Ergebnisse aus der Praxis

Unsicherheitsanalyse:

- Mit einer mittleren Unsicherheit der Luftwechselrate von ±15,3 %



Zusammenfassung und Diskussion

Ergebnisse:

- Ermittlung der Luftwechselrate aus beliebigen Radonkonzentrationsverläufen
- Gute Ergebnisse bei den Messungen an der Messkammer
- Unsicherheit der Rekonstruktion hängt direkt von der Unsicherheit der Quellstärke ab.

Herausforderungen:

- Die Methode soll noch bei Wohnhäusern erprobt werden
- Prüfen bei Wohnhäuser, ob die Radonquellstärke während der Messung konstant bleibt
- Nach dem gleichen Prinzip wird ein Modell für den Zusammenhang zwischen Schadstoffkonzentration wie z.B. Konzentration der flüchtigen Kohlenwasserstoff - verbindungen (VOC) aus der Luftwechselrate entwickelt.
- Schätzung des Verlaufes von VOC aus dem Luftwechselverlauf
- Schätzung des Verlaufes von VOC aus dem Radonkonzentrationsverlauf

Vielen Dank!